7 КОМПЛЕКС ОБЛЫСТАҒЫ ҚАТАРЛАР. ТЕЙЛОР ЖӘНЕ ЛОРАН ҚАТАРЛАРЫ.

7.1 Комплекс сандық қатарлар

$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ комплекс сандар тізбегі берілсін, мұндағы

$$z_n = f(n) = x_n + iy_n, \ (x_n, y_n \in R, \quad n \in N)$$

тізбектің жалпы мүшесі.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \qquad (7.1)$$

өрнегін *комплекс сандық қатар* деп атаймыз. (7.1) қатары

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \ldots + (x_n + iy_n) + \ldots$$

түрінде де жазылады.

Нақты сандар қатарларындағы сияқты

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + i \sum_{n=1}^{n} y_k \qquad (7.2)$$

қосындысы (7.1) қатарының n-ші дербес қосындысы деп аталады.

Анықтама 20. Егер S_n дербес қосындылар тізбегінің

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k + i \lim_{n \to \infty} \sum_{n=1}^{n} y_k = S$$

тиянақты шегі бар болса, онда (7.1) қатары *жинақты қатар* деп, ал S - комплекс саны оның *қосындысы* деп аталады. Жинақты қатардың қосындысы да (7.1) түрінде белгіленеді де, (7.1) қатарының қосындысы S санына тең дегенді $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = S$ түрінде жазамыз. Егер де $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$ немесе S_n тізбегінің шегі жоқ болса, онда (7.1) қатары *жинақсыз қатар* деп аталады.

Тізбектің шегінің қасиеті бойынша (7.1) қатары жинақты болу үшін

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \ldots \qquad (7.3)$$

және

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = y_1 + y_2 + \ldots + y_k + \ldots \qquad (7.4)$$

нақты сандар қатарларының әрқайсысының жинақты болуы қажетті және жеткілікті болатыны шығады. Сондай-ақ, S_1 - (7.3) қатарының, ал S_2 - (7.4) қатарының қосындысы болса, онда $S = S_1 + iS_2$ теңдігі орынды болады. Бұдан, мүшелері комплекс сандар болып келетін қатардың жинақтылыққа зерттелінуі мүшелері нақты сандар болатын (7.3) және (7.4) қатарларының жинақтылықтарының зерттелінуіне әкелетіні шығады.

Сондықтан нақты сандық қатарларға тән төмендегі ұғымдар мен тұжырымдар комплекс сандық қатарлар теориясында да орынды болады.
Егер (7.1) қатары жинақты болса, онда

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Бұл теңдік (7.1) қатарының жинақтылығының қажетті шарты болады.
Салдар: Егер $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$ болса, онда (7.1) қатары жинақсыз болады.

$$r_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k + i\sum_{k=n+1}^{\infty} y_k$$

қатары (7.1) қатарының *қалдығы* деп аталады. Егер (7.1) қатары жинақты болса, онда $r_n = S - S_n$.

Анықтама 21. Егер (7.1) қатарының мүшелерінің абсолюттік шамаларынан құрылған қатар, яғни

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots \tag{7.5}$$

қатары жинақты болса, онда (7.1) қатары *абсолютті жинақты* деп аталады.

Абсолютті жинақты қатарлар үшін келесі қасиеттер орынды:
1) асолютті жинақты қатар жинақты қатар болады;
2) егер қатар абсолютті жинақты болса, онда оның мүшелерінің орнын ауыстырғаннан қатардың жинақтылығы мен қосындысы өзгермейді;
3) егер қатар абсолютті жинақты болса, онда оның мүшелерін қалай топтасақ та қатардың жинақтылығы мен қосындысы өзгермейді;
4) абсолютті жинақты қатарларды мүшелеп көбейткеннен алынған қатар абсолютті жинақты болады.

(7.5) қатары оң сандық қатар болғандықтан, комплекс сандық қатардың абсолютті жинақтылығын анықтау үшін оң сандық қатарының жинақтылық белгілерін қолдана аламыз.

1. *Салыстыру белгілері:*

I салыстыру белгісі. Егер $k > N$ үшін $|z_k| \le |w_k|$ теңсіздігі орынды болатындай қандай да бір N саны табылып және $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$ қатары жинақты болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары абсолютті жинақты болады.

II салыстыру белгісі. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|z_k|}{|w_k|}$ шегі нөлден өзгеше сан болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ және $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ қатарларының бірінің абсолютті жинақтылығынан екіншісінің де абсолютті жинақтылығы шығады.

2. *Даламбер белгісі.* Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|}<1$ болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары абсолютті жинақты болады.

3. *Кошидің радикалдық белгісі.* Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}<1$ болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары абсолютті жинақты болады.

7.2 Дәрежелік қатарлар

М жиынында анықталған комплекс аргументті функциялар тізбегі

$$f_1(z),\ f_2(z),\ldots,\ f_n(z),\ \ldots$$

берілсін. Осы функциялар арқылы құрылған

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)= f_1(z)+ f_2(z)+\ldots+ f_n(z)+\ldots \qquad (7.6)$$

қатары *функциялық қатар* деп аталады.

Егер z айнымалысына $z_0\in M$ тұрақты мәнін берсек (7.6) функциялық қатарынан

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)= f_1(z_0)+ f_2(z_0)+\ldots+ f_n(z_0)+\ldots$$

сандық қатарын аламыз. Бұл сандық қатар жинақты болса z_0 нүктесі (7.6) функциялық қатарының *жинақтылық нүктесі* деп аталады да, (7.6) функциялық қатарын z_0 нүктесінде *жинақты* дейміз. (7.6) функциялық қатарының барлық жинақтылық нүктелерінің жиынын осы қатардың *жинақтылық облысы* деп атаймыз.

Егер (7.6) функциялық қатарында $f_n(z)$ функциясын $f_n(z)=c_n(z-z_0)^n$ түріндегі дәрежелік функция деп алсақ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots \qquad (7.7)$$

дәрежелік қатарын аламыз, мұндағы c_n - комплекс сан (қатардың коэффициенті), $z=x+iy$ - комплекс айнымалы, z_0 - берілген комплекс сан.

(7.7) дәрежелік қатары z_0 нүктесінде жинақты (қосындысы c_0). Олай болса оның жинақтылық облысы құр жиын емес.

Енді (7.7) дәрежелік қатарының жинақтылық облысын айқындайтын негізгі теоремаға тоқталайық.

Абель теоремасы. Егер (7.7) дәрежелік қатары қандай да бір $z_1\neq z_0$ нүктесінде жинақты болса, онда ол $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген z нүктесінде (яғни центрі z_0 нүктесі, радиусы $|z_1-z_0|$ болатын ашық дөңгелекте) абсолютті жинақты болады. Егер (7.7) дәрежелік қатары қандай да бір z_2 нүктесінде жинақсыз болса, онда ол $|z-z_0|>|z_2-z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген z нүктесінде (яғни центрі z_0 нүктесі, радиусы $|z_2 - z_0|$ болатын тұйық дөңгелектің сыртында) жинақсыз болады.

Абель теоремасынан, егер теоремада аталған z_1 және z_2 нүктелері бар болса, онда (7.7) қатары $|z - z_0| < R$ дөңгелегінде жинақты, ал оның сыртында жинақсыз болатын R оң саны табылатыны шығады.

R саны (7.7) қатарының *жинақтылық радиусы*, ал $|z - z_0| < R$ дөңгелегі қатардың *жинақтылық дөңгелегі* деп аталады.

Егер (7.7) қатары тек z_0 нүктесінде жинақты болса $R = 0$, ал кез келген нүктеде жинақты болса $R = \infty$ деп аламыз.

(7.7) қатарының жинақтылық радиусын

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \tag{7.8}$$

немесе

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{7.9}$$

формулаларымен табуға болады.

7.3 Тейлор қатары

Бұл тақырыпта z_0 нүктесінің қандай да бір аймағында аналитикалық f(z) функциясының (7.7) түріндегі дәрежелік қатарға жіктеу сұрағы қарастырылады.

z_0 нүктесінің $|z - z_0| < R$ аймағында бірмәнді және аналитикалық f(z) функциясы осы аймақта

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots \tag{7.10}$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7.11}$$

түрінде дәрежелік қатарына жіктеледі, мұндағы C – центрі z_0 болатын, берілген аймақта жатқан кез келген оң бағытты шеңбер. Коэффиценттері (7.11) формуласымен анықталатын (7.10) қатары f(z) функциясының z_0 нүктесінің аймағындағы *Тейлор қатары* деп аталады.

Егер f(z) аналитикалық функциясы дәрежелік қатарға жіктелсе, онда ол Тейлор қатары болады.

Тейлор қатарынан $z_0 = 0$ дербес жағдайында

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

қатарын аламыз. Бұл қатар *Маклорен қатары* деп аталады.

e^z көрсеткіштік және $\sin z, \cos z$ тригонометриялық функцияларының $z_0 = 0$ нүктесінің аймағында Тейлор қатарына (яғни Маклорен қатарына) жіктелулері

4 тақырыбында олардың анықтамалары ретінде беріліп кеткен.
Енді

$$\mathrm{w}=\ln(1+\mathrm{z}),\quad w=(1+\mathrm{z})^{\alpha}$$

жіктелулеріне тоқталайық:

$$\ln(1+\mathrm{z})=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots,\quad |z|<1; \tag{7.12}$$

$$(1+\mathrm{z})^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}z^n+\ldots,\quad |z|<1. \tag{7.13}$$

(7.13) жіктелуі $\alpha=-1$ жағдайында

$$\frac{1}{1+\mathrm{z}}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots,\quad |z|<1 \tag{7.14}$$

түрінде жазылады. (7.12), (7.13) қатарлары $|\mathrm{z}|<1$ дөңгелегінде абсолютті жинақты болады.

(7.12) формуласы логарифмнің бас мәнінің $\mathrm{z}=0$ нүктесінің аймағында Тейлор қатарына жіктелуін береді. $\mathrm{Ln}(1+\mathrm{z})$ көпмәнді функциясының басқа мәндерінің Тейлор қатарына жіктелуін жазу үшін (7.12) қосындысына $2n\pi i,\ n=\pm1,\pm2,\ldots$ санын қосу керек:

$$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{z})=2n\pi i+z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots .$$

7.4 Теріс дәрежелік қатар

$$\frac{\mathrm{c}_{-1}}{\mathrm{z}-\mathrm{z}_0}+\frac{\mathrm{c}_{-2}}{(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^2}+\ldots+\frac{\mathrm{c}_{-\mathrm{n}}}{(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^{\mathrm{n}}}+\ldots=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathrm{c}_{-\mathrm{n}}}{(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^{\mathrm{n}}}=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{c}_{-\mathrm{n}}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^{-\mathrm{n}} \tag{7.15}$$

түріндегі қатары берілсін, мұндағы $z=x+iy$ - комплекс айнымалы, z_0, $\mathrm{c}_{-\mathrm{n}}$ $(n=1,2,\ldots)$ - берілген комплекс сандар, $\mathrm{c}_{-\mathrm{n}}$ - қатардың коэффициенті. Бұл қатарды *теріс дәрежелік қатар* деп атаймыз.

Егер (4.6) қатарында $\dfrac{1}{z-z_0}=\omega$ ауыстыруын жасасақ

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\omega^n$$

дәрежелік қатарын аламыз. Бұл қатардың R жинақтылық радиусы мен $|\omega|<R$ жинақтылық дөңгелегін (7.8) немесе (7.9) формуласы бойынша тауып алып $\omega=\dfrac{1}{z-z_0}$ кері ауыстыруын жасасақ, (7.15) қатарының

$$|z-z_0|>r \tag{7.16}$$

жинақтылық облысын аламыз, мұндағы *r* саны

$$r=\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\mathrm{c}_{-\mathrm{n}-1}|}{|\mathrm{c}_{-\mathrm{n}}|}\ \text{немесе}\ r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\mathrm{c}_{-\mathrm{n}}|}. \tag{7.17}$$

формулалары бойынша табылады.

7.5 Лоран қатары

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n =$$
$$= \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \tag{7.18}$$

түріндегі қатарды қарастырамыз. Бұл қатардың *жинақтылық облысы* деп (7.15) қатары да, (7.10) қатары да жинақты болатын облысты айтамыз.

(7.15) қатары $|z-z_0|>r$ облысында, яғни центрі $z=z_0$ радиусы r болатын дөңгелектің сыртында; ал (7.10) қатар $|z-z_0|<R$ дөңгелегінде жинақты болсын. Бұдан, егер

1) $r>R$ болса, онда (7.18) қатары бүкіл жазықтықта жинақсыз;
2) $r<R$ болса, онда (7.18) қатары $r<|z-z_0|<R$ сақинасында жинақты. Мұнда $r \geq 0, \quad 0<R<+\infty$.

r және R радиустары сәйкесінше (7.16) және (5.8), (7.10) формулалары бойынша табылады.

Енді $f(z)$ аналитикалық функциясының (7.18) түріндегі қатарға жіктелуін қарастырамыз.

Лоран теоремасы. $0 \leq r < |z-z_0| < R \leq +\infty$ сақинасында бірмәнді және аналитикалық $f(z)$ функциясы үшін осы сақинада жалғыз түрде келесі жіктелу орынды болады:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{7.19}$$

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{7.20}$$

мұндағы С – центрі $z=z_0$ нүктесі болатын, берілген сақинада жатқан кез келген шеңбер.

(7.19) қатары $f(z)$ функциясының *Лоран қатары* деп аталады.

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{7.21}$$

қатары (7.19) Лоран қатарының бас бөлігі, ал

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (z-z_0)^n$$

қатары *Лоран қатарының дұрыс* (*регулярлы*) *бөлігі* деп аталады.

Іс жүзінде (7.20) формуласы бойынша c_n коэффициентін табу күрделі есептеулерге әкелетін себепті оны жиі қолданбаймыз. Әдетте, егер мүмкін болса, қарапайым функциялардың Тейлор қатарына жіктелуінің дайын формулаларын пайдаланған қолайлы болады.